Mário Biazzi (Uniso)

O número zero

REVISTA DE ESTUDOS UNIVERSITÁRIOS | SOROCABA, SP | V. 29 | Nº 1 | JUN. 2003 | P. 106-116

RESUMO

Este artigo tem por objetivo um breve estudo sobre os *números perfeitos*. Para entendê-los, vamos nos deter nos números naturais ou inteiros positivos e fazer uma breve incursão na história do *número zero*, destacando sua importância e como foi concebido.

ABSTRACT

This paper has as the objective a brief study on perfect numbers. To understand them, we will focus on natural numbers or whole positive numbers and make a brief incursion in the history of number zero, pointing out its importance and how it was conceived.

Palavras-chaves: matemática, números naturais, números perfeitos, zero

"Deus fez os números. O resto é obra dos homens".
"A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas"
Gauss

Os números são uma das maiores provas da genialidade do ser humano. Dados da antropologia comprovam que todo povo tem alguma terminologia para os primeiros números. Mesmo as mais primitivas tribos expressavam-se contando até dois, três ou quatro. A construção do processo de contar estava sempre relacionado com objetos familiares, como os dedos das mãos, os dedos dos pés, varetas, dentes ou número de palavras. Assim, supõe-se, surgiram os números naturais: 1, 2, 3, 4, 5...

Os antigos hebreus e os gregos, que usavam uma espécie de numerologia, faziam adaptações dos números, utilizando-os para explicar as suas superstições e quase-religiões. É interessante salientar que o número zero não é natural, ou seja, não surgiu naturalmente da necessidade de contar. Os povos primitivos não tinham a noção do vazio, ou do nada, bem como do nenhum, associado à idéia de número. Daí a ausência do número zero nas primeiras incursões do homem na criação dos números.

O número zero

Durante mais de quinze séculos, os matemáticos e os astrônomos babilônios ignoraram o zero. Este nasceu há 5.000 anos, com os sumérios, na Babilônia antiga. Quando se aplica o princípio de posição, há que se dispor de um signo gráfico que represente o "nada". A representação do número 132, por exemplo, é bastante clara para todos nós. É um número com 1 centena, 3 dezenas e 2 unidades, na base 10. Como representar dessa mesma maneira o número 102, se não temos o algarismo *zero* ou o numeral *zero*? A forma usual 1-2, não deixa claro que este numeral representa 102 e não 12 ou 1002! Uma determinada data, por exemplo, como poderíamos escrever? Hoje é 2 de 3 de 2—3, ou seja 20 de março de 2003. A leitura fica extremamente complicada. Ou não?

Esta "alguma coisa", que não significa "nada" é o sinal gráfico para marcar a ausência das unidades. Confusões como "a presença do nada" com "ausência de algo" geraram paradoxos como: "qualquer coisa é melhor que nada; nada é melhor que Deus, logo qualquer coisa é melhor que Deus".

Os matemáticos da Babilônia, e independentemente de sua influência, também os sábios chineses redescobriram a mesma regra, combinando regularmente o princípio de posição. Sua base era a decimal e, apesar de completamente diferente do nosso sistema atual, era um pouco melhor do que o sistema babilônico. De qualquer forma ocorriam inúmeras dificuldades por ignorarem o *zero*. E isso durou vários séculos.

Por volta do ano 500 a.C., Parmênides, filósofo grego, cria o paradoxo do *julgamento negativo*, que afirmava: se uma afirmação declara que uma certa coisa existe, então sua negativa indicará alguma coisa que não existe. Então, uma frase sobre algo que não existe é uma frase sobre nada e, portanto, impossível. Platão, em seus diálogos, faz uso desse paradoxo e conclui que é impossível existir uma grandeza nula.

Nos anos 400 a.C., os chineses, em seus ábacos de mesa, deixavam casa vazia onde colocamos hoje o zero. Isso originava enormes confusões, o que evidenciava a falta do símbolo do zero. A representação dos números 22 e 202 era, no mínimo, confusa, considerando a falta do símbolo que denotaria o zero.

Nos anos 300 a.C. os mesopotâmios passam a usar um algarismo zero medial em suas tabelas astronômicas. Contudo, nunca usavam o zero inicial ou final. Somente nos tempos da conquista de Alexandre, o Grande (331 a.C.), foi criado um símbolo especial, que consistia de duas pequenas cunhas colocadas obliquamente (sistema cuneiforme). Era usado para marcar o lugar onde um algarismo faltasse.

A civilização maia, uma das mais avançadas culturas pré-colombianas da América Central, influenciou todas as outras, principalmente a asteca; e essa influência pode ser comparada a dos gregos sobre os romanos da antiguidade. No primeiro milênio da era cristã, enquanto os povos ocidentais estavam mergulhados na desordem política, na recessão econômica e no obscurantismo, os maias chegavam ao auge do desenvolvimento em várias áreas: artes plásticas, escultura, arquitetura, educação, comércio, astronomia e matemática. Na Matemática, segundo G. Ifrah[1], descobriram o princípio de posição e criaram o zero. Até então, apenas três povos trabalhavam com o sistema de posição: os babilônios, os chineses e os maias.

[1] G. Ifrah, *Os números*. São Paulo: Globo, 1985, p. 250.

Por volta de 150 d.C., Ptolemaios usa um algarismo zero para representar, no sistema sexagesimal, os números de suas tabelas trigonométricas e astronômicas. Usa tanto o zero medial como o zero final.

Varahamihira, matemático indiano, usa um pequeno círculo para denotar o algarismo zero, em seu livro *Pancasiddhantika*, em 500 d.C.

Em 850 d.C., Al Khwarizmi, após ter aprendido a calcular, conforme o estilo indiano, com o Shiddhanta de Brahmagupta, escreveu um livro de Aritmética chamado *Cálculo com os números indianos*. Esse livro divulgou o sistema posicional decimal e as respectivas técnicas de cálculo no mundo islâmico. Simultaneamente, acontece a divulgação do zero no mundo de língua árabe. Dos nomes *sünya, pujyam* ou *sübra*, usados no livro de Brahmagupta, Al Khwarizmi adotou *sübra* para denotar o zero. Daí a evolução *sübra, siphra, sifr* resulta cifra e outras variações européias, como *zephirum* (pronúncia latina de *sifr*), até chegarmos ao moderno *zero*.

No ano 980 d.C., o monge Gerbert d'Aurillac (futuro Papa Silvestre II) viaja pela Espanha islâmica, onde aprende a calcular através do sistema indiano. Ao retornar ao mundo cristão, tenta popularizar essa técnica de cálculo adaptando-a a um ábaco, que utilizava pedras numeradas. Gebert não teve sucesso por não ter entendido a essência do cálculo indiano, em particular, a importância do zero no mesmo, já que, em seu ábaco, o zero era supérfluo.

Leonardo de Pisa (1170/80 – 1250 d.C.), que havia aprendido a calcular no sistema indiano, em suas viagens de estudos pela África islâmica, escreve seu famoso livro, o *Líber abaci* que, juntamente com a tradução latina da aritmética de al Khwarizmi, foram os grandes introdutores do sistema indo-arábico no mundo cristão e dois dos mais importantes livros da história da humanidade.

Que Fibonacci (apelido de Leonardo de Pisa) ainda via o zero com desconfiança pode ser percebido pela maneira que ele se referia aos algarismos: "novem figure indorum" (os nove algarismos indianos) e o "hoc signum O... quod arabice zephirum appelatur" (o sinal zero).

Foi Sacrobosco, em 1250 d.C., que, com base nas idéias de al Khwarizmi e Fibonacci, escreveu seu *Algorismus Vulgaris*, que era usado nas universidades medievais e, portanto, divulgou, definitivamente, o sistema posicional decimal e suas técnicas de cálculo na comunidade científica de então. A adoção desse sistema foi lenta, já que a comunidade acadêmica e científica da época continuava a usar o sistema de numeração romana e os cálculos com ábacos. Esse uso ainda durou séculos. Para a população em geral, era comum e freqüente traduzir para o sistema romano os números escritos no sistema indiano. Daí a origem do termo "decifrar". Dessa forma foi incluído o zero no nosso sistema de numeração. Em qualquer base de numeração o conceito do número zero é absolutamente imprescindível, mas relativamente recente.

Os números perfeitos

A irmandade pitagórica acreditava que, se entendessem as relações entre os números, poderiam descobrir o segredo espiritual do Universo. Com essa visão, partiu para o estudo dos números inteiros e fracionários. Foi assim que descobriram os números triangulares, os números quadrangulares, a lei da harmonia tradicional e o famosíssimo teorema de Pitágoras. Entre os números inteiros positivos, buscavam os números com algum significado especial, que eram os chamados "números perfeitos". De acordo com Pitágoras, a perfeição numérica dependia do numero de divisores que o número tinha[2].

Com essa óptica, os números inteiros positivos dividiam-se em:

a) *Números excessivos* – quando a soma de seus divisores próprios é maior que o número. Por exemplo, 12 é um número excessivo, já que a soma de seus divisores próprios é maior que 12, ou seja, $16 > 12$, já que seus divisores próprios são $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

b) *Números deficientes* – aqueles cuja soma dos divisores próprios é menor que o próprio número. Por exemplo, 10 é um número deficiente, já que a soma de seus divisores próprios é igual a 8 e $8 < 10$. Os divisores próprios de 10 são $1 + 2 + 5 = 8$.

c) *Números perfeitos* – os mais importantes e raros; aqueles cuja soma de seus divisores próprios é igual ao número. Exemplo, o número perfeito 6, cuja soma de seus divisores próprios é $1 + 2 + 3 = 6$.

Dado um número inteiro positivo qualquer, ele é deficiente, excessivo ou perfeito, e cada uma das possibilidades elimina as outras duas. Também aqui existia o misticismo e explicações culturais do significado dos núme-

[2] Na relação "a divide "b"; se **a/b**, então existe **c**, tal que **b** = **ac**, com a, b, c inteiros e a $\neq 0$. Daí diremos que **a** é divisor de **b**.

ros perfeitos. A órbita da Lua em relação à Terra tem 28 dias. 28 é um número perfeito, 1 + 2 + 4 + 7 + 14 tem soma 28. Deus teria criado a Terra em 6 dias e 6 é perfeito. A partir de 28, a descoberta de um número perfeito vai ficando mais difícil. Os números perfeitos são 6, 28, 496, 8128, 33550336... Os estudiosos pitagóricos perceberam que, além da soma de seus divisores próprios, estes números possuem várias outras propriedades, como aquela que todo número perfeito é a soma de números inteiros consecutivos.

De fato:

$6 = 1 + 2 + 3$

$28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$

$496 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \ldots + 30 + 31$

$8128 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + 126 + 127$

Outro fato interessante: a perfeição dos números estava ligada ao número 2. As potências de 2 são os números da forma 2^n, com n inteiro positivo. As potências de dois não são números perfeitos, mas têm uma propriedade interessante: a soma de seus divisores próprios é sempre uma unidade menor que o próprio número. Isso os torna "levemente imperfeitos".

$2^2 = 2 \times 2 = 4$	divisores 1, 2	soma = 3.
$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$	divisores 1, 2, 4	soma = 7.
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	divisores 1, 2, 4, 8	soma = 15.
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$	divisores 1, 2, 4, 8, 16	soma = 31, e assim

sucessivamente.

Dois séculos depois, Euclides aperfeiçoaria a ligação encontrada por Pitágoras entre o 2 e a perfeição. Descobriu-se que os números perfeitos são sempre o produto de uma potência de 2 pela potência seguinte de 2 menos 1.

Temos então que se $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ e $2^n - 1$ é primo; então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é *perfeito.*

Por exemplo, para $n = 3$, $2^3 - 1 = 7$ é primo; logo, $2^2(2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28$ é *perfeito.* $n = 5$, $(2^5 - 1) = 31$ é primo; logo, $2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496$ é *perfeito.*

A função sigma

A função σ nos dá a soma dos divisores de um determinado número inteiro n, e indicamos por $\sigma(n)$.

Por exemplo σ (25) = 1 + 5 + 25 = 31

σ(15) = 1 + 3 + 5 + 15 = 24

σ(28)=1+ 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.

O número perfeito n tem σ (n) = 2n.

Se p é um numero primo, então, σ (p) = 1 + p.

Qual é o σ de n = p^{α} ?E

Os divisores de n são 1, p, p^2, p^3, ...p^{α}E E E E EE

Daí, σ n)=1+p+p^2+p^3...+p^{α}

$$\sigma(p^{\alpha}) := \frac{(p^{\alpha} + p^{\alpha-1} + ... + p + 1)?(p-1)}{p-1}$$

$$\sigma(p^{\alpha}) := \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p-1}$$

É claro que n —> σ (n) é uma função definida com valores no conjunto dos inteiros positivos. Também é verdade que a função s é multiplicativa, isto é, σ (a.b) = σ (a). σ (b). Este fato admitiremos sem demonstração.

Vamos agora demonstrar o seguinte teorema: *Se 2^n-1 é um número primo, inteiro e positivo, então a = $2^{n-1}(2^n-1)$ é perfeito e todo número par perfeito é desta forma.*

Prova:

Seja a = $2^{n-1}(2^n-1)$, onde 2^n-1 é um número primo. Então,

$\sigma (a) = \sigma [2^{n-1}(2^n-1)] = \sigma (2^{n-1}) .\sigma (2^n-1) = (2^n-1) (2^n-1 + 1) = 2^n (2^n-1) = 2.a$

Daí, segue-se que a é perfeito, por definição.

Inversamente, vamos supor que *a* é um número perfeito par. Vamos estudar a relação entre m e n na igualdade: a = m.2^{n-1} com as condições de que n 2, m ímpar , m > 0. Também é verdade que:

m2^n = 2a e como a é perfeito, temos que

m2^n = 2a =σ (a) = σ (m.2^{n-1}) = σ (m) s (.2^{n-1}) = σ (m) (2^n – 1)

Daí, temos a seguinte expressão:

$$\sigma(m) := \frac{m2^n}{2^n - 1} = m + \frac{m}{2^n - 1}$$

e como σ(m) é um inteiro e (2^n, 2^n – 1) = 1, podemos afirmar que (2^n – 1)/ m.

Também está claro que, como σ (m) é um inteiro, o segundo membro da igualdade, que é igual a s (m), também é inteiro, e como m é inteiro e, como já vimos que (2^n, $2^n - 1$) = 1, a razão de m por $2^n - 1$ também é um inteiro.

Então. podemos deduzir que σ (m) é igual à soma de *m* e um outro divisor de m., ou seja, tem somente dois divisores positivos e, portanto, por definição, é um número primo, pois para $n \neq 2$, resulta $m > 1$. Ora, se m é um número primo, tem dois divisores positivos, o próprio m e 1, logo, conclui-se que:

$$\frac{m}{2^n - 1} := 1$$

Daí $m = 2^n\text{-}1$ e $a = 2^{n-1}(2^n\text{-}1)$, onde $2^n\text{-}1$ é primo, cqd

Conclusão

Assim, conseguimos estudar rapidamente os números perfeitos e uma propriedade interessantíssima que nos dá a forma de alguns números perfeitos. Apenas uma rápida visão sobre esse fascinante universo dos números inteiros. Para encerrar vamos deixar apenas uma pergunta: *zero é um número perfeito?*

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. *História da matemática.* S. Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1974.

HYGINO, D. H. *Fundamentos da aritmética.* S. Paulo: Atual, 1991.

IFRAH, G. *Os números.* São Paulo: Globo, 1985.

LEVEQUE, W. *Teoria elemental de los números.* México: Herrero Hermanos, 1968.

LONG, C. T. *Elementary introduction to number theory.* Boston: Heath and Co., 1965.

ORE. O. *Number theory and his history.* New York: Dover, 1976.

USPENSKY; and HEASLET. *Elementary number theory.* New York and London: McGraw Hill, 1939.

VINOGRADOV, I. *Fundamentos de la teoria de los números.* Moscou: Mir, 1971.

Endereço do autor:

Rodovia Raposo Tavares, km 92,5
18023-000 – SOROCABA, SP
E-mail: mario.biazzi@uniso.br