Mário Biazzi(*)

Equações de 3º. e 4º. graus

(*) Professor de Álgebra Superior do Curso de Pós-graduação de Matemática da Universidade de Sorocaba – UNISO.

RESUMO

As equações de 1º. e 2º. graus são resolvidas de forma elementar. A fórmula de Báskara resolve as equações do 2º. Grau. Um estudo sobre o comportamento das equações de 3º. e 4º. graus e a busca dos discriminantes dessas equações constituem o tema deste artigo e fizeram parte do Curso de Álgebra Superior ministrado no Curso de Pós-graduação de Matemática, na Universidade de Sorocaba - UNISO, em 1998.

ABSTRACT

The equations of 1st and 2nd degrees are solved in a simple manner. Báskara's formula solves the 2nd degree equations. A study on the operation of 3rd and 4th degrees equations and their discriminants is the theme of this article and was part of the class on Higher Algebra given at the Post-Graduation Course in Mathematics, at the University of Sorocaba, in 1998.

Introdução

O que é uma EQUAÇÃO e o que significa RESOLVER UMA EQUAÇÃO ?

Dadas duas funções polinomiais $y = f(x)$ e $y = g(x)$, chama-se EQUAÇÃO POLINOMIAL ou EQUAÇÃO ALGÉBRICA a sentença aberta $f(x) = g(x)$.

Dada uma equação polinomial $f(x) = g(x)$, chama - se RAIZ da equação todo número que, pertencendo ao conjunto Universo desta equação, substituído em lugar da variável **x**, torna a sentença verdadeira. Desta forma, r é raiz da equação $f(x) = g(x)$, se $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira.

Chama - se CONJUNTO SOLUÇÃO ou CONJUNTO VERDADE da equação $f(x) = g(x)$ o subconjunto do conjunto Universo tal que qualquer que seja z pertencente ao conjunto verdade, então $f(z) = g(z)$ é verdadeira.

Resolver uma equação polinomial é encontrar seu conjunto solução.

Duas equações polinomiais são EQUIVALENTES, quando apresentam o mesmo conjunto verdade tendo o mesmo conjunto Universo.

Para qualquer equação polinomial $f(x) = g(x)$ através de simples transformações algébricas sempre podemos obter uma equivalente na forma $p(x) = 0$.

Dada uma equação algébrica $p(x) = 0$, diremos que a equação é de GRAU n (n é um inteiro positivo), se n é o maior expoente da variável onde o coeficiente é diferente de zero. A equação $5x^3 - 3x^2 - x + 4 = 0$ é, então, de grau 3.

Como toda equação polinomial pode ser colocada na forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

podemos dizer que o polinômio $P(x)$ de grau $n \geq 1$, então admite exatamente n raízes complexas.

Equações do 1.º grau

A equação geral do 1º grau pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, onde a e b são números complexos quaisquer, com **a** não nulo. Sua resolução é bastante simples e sua raiz é única e da forma $x = -b/a$ que é o único elemento do conjunto solução.

Exemplo:

Seja a equação $4x + 9 = 0$. Seu conjunto verdade é um conjunto unitário cujo único elemento é a raiz $-9/4$

Equações do 2.º grau

Seja dada a equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Como necessariamente $a \neq 0$, sem perda de generalidade podemos afirmar que é equivalente à equação $x^2 + px + q = 0$, onde os coeficientes $p = b/a$ e $q = c/a$ são coeficientes complexos quaisquer. Esta equação pode ser escrita na forma

$$(x + p/2)^2 + (q - p^2/4) = 0$$

Como sabemos pode - se extrair a raiz quadrada do número complexo $(p^2/4) - q$, e a raiz quadrada é ainda um número complexo. Os valores da raiz, que se diferenciam pelo sinal apenas, escrevemos na forma

$$\pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{portanto,}$$

$$x + p/2 = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ou seja, as raízes da equação dada podem ser encontradas ao aplicarmos a fórmula, bastante simples,

$$x = -p/2 \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad ; \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

que é a FÓRMULA DE BÁSKARA.

Equações cúbicas

A diferença do caso das equações quadráticas é que, até agora, não temos um método para a resolução das equações cúbicas, inclusive para o caso de coeficientes reais. Vamos, agora, buscar uma fórmula semelhante à fórmula de

Báskara para as equações cúbicas, supondo-se ainda que os coeficientes são números complexos. Seja dada a equação cúbica,

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

com coeficientes complexos quaisquer. Esta equação é absolutamente geral, já que o coeficiente do termo de terceiro grau pode ser considerado 1, com procedimentos semelhantes àqueles efetuados, quando da discussão da equação de segundo grau.

Substituindo - se na equação a incógnita y por uma nova incógnita x, ligada a y por meio da seguinte mudança de variável,

$$y = x - \frac{a}{3},$$

resulta uma equação na incógnita x; esta equação, como podemos demonstrar facilmente, não contém o termo que a variável está ao quadrado, ou seja, é uma equação na forma,

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (*)$$

Se nós conseguirmos encontrar as raízes desta equação, teremos as raízes da equação original e nosso problema estará resolvido. Portanto, nosso problema, agora, é resolver esta equação "reduzida" com quaisquer coeficientes complexos.

Pelo teorema fundamental esta equação tem três raízes complexas. Seja x_0 uma destas raízes. Introduzamos uma incógnita auxiliar u e examinemos o polinômio,

$$f(u) = u^2 - x_0 u - \frac{p}{3}$$

Seus coeficientes são números complexos, possuindo, portanto, duas raízes complexas α e β. Pelas relações entre "coeficientes e raízes", temos,

$$\alpha + \beta = x_0$$
$$\alpha\beta = -p/3 \quad (**)$$

Substituindo estes valores na equação anterior, temos,

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

ou seja

$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0$$

Daí, como $\alpha\beta = -p/3$, deduzimos que $3\alpha b + p = 0$, donde resulta,

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q$$

e também

$$\alpha^3 \beta^3 = -p^3/27 \quad (**)$$

Destas últimas igualdades podemos concluir que α^3 e β^3 são raízes da equação quadrática

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,\ \text{com coeficientes complexos.}$$

Resolvendo - se tal equação, obtemos,

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},\ \text{donde,}$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ \text{ e }\ \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Obtivemos a seguinte fórmula, conhecida pelo nome de **fórmula de Cardano**, que expressa as raízes da equação (*) mediante seus coeficientes, valendo - se de radicais quadrados e cúbicos:

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como o radical cúbico tem três valores no campo dos números complexos, as fórmulas obtidas anteriormente nos dão três valores para α e três valores para β. Portanto, ao aplicarmos a fórmula de Cardano, não se pode combinar qualquer valor do radical α com qualquer valor do radical β; para um valor dado de α deve - se tomar somente aquele dos três valores de β que satisfaz as condições (**).

Seja α_1 um dos três valores do radical α. Então, como já é conhecido da teoria dos números complexos, os outros dois podem ser obtidos multiplicando - se α_1 pela raízes cúbicas ε e ε^2 da unidade:

$$\alpha_2 = \alpha_1 \ \varepsilon, \qquad \alpha_3 = \alpha_1 \ \varepsilon^2.$$

Designemos por β_1 o valor do radical β que corresponde ao valor α_1 do radical α segundo $\alpha \beta = - p / 3$, de modo que $\alpha_1 \beta_1 = - p / 3$

Os outros valores de β serão

$$\beta_2 = \beta_1 \ \varepsilon, \quad \beta_3 = \beta_1 \ \varepsilon^2.$$

Como $\varepsilon^3 = 1$

$$\alpha_2 \beta_3 = \alpha_1 \ \varepsilon \beta_1 \ \varepsilon^2 = \alpha_1 \ \beta_1 \ \varepsilon^3 = \alpha_1 \ \beta_1 = - p / 3,$$

o valor de α_2 do radical α corresponde ao valor β_3 do radical β; analogamente o valor β_2 corresponde ao valor α_3. Portanto, todas as raízes da equação original $x^3 + px + q = 0$ podem ser escritas do modo seguinte:

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$x_2 = \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1 \ \varepsilon + \beta_1 \ \varepsilon^2$$

$$x_3 = \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1 \ \varepsilon^2 + \beta_1 \ \varepsilon$$

Equações cúbicas com coeficientes reais

Vejamos o que se pode dizer das raízes da equação cúbica reduzida

$$x^3 + px + q = 0,$$

se seus coeficientes são números reais. Neste caso, desempenha um papel fundamental a expressão

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

que figura na fórmula de Cardano sob o radical quadrado.

Observemos que o sinal desta expressão é contrário ao sinal da expressão

$$D = - 4 \ p3 \ - 27 \ q2 = - 108 \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)$$

que denominaremos de DISCRIMINANTE da equação $x^3 + px + q = 0$; nas formulações posteriores usaremos o sinal do discriminante.

1) Seja $D \langle 0$. Neste caso, na fórmula de Cardano, sob o símbolo de cada um dos radicais quadrados, figura um número positivo. Por isso os números que figuram sob os símbolos de cada um dos radicais cúbicos são **números reais**. Então podemos deduzir que a raiz cúbica de um número real tem um valor real e dois valores complexos conjugados. Seja α_1 um valor real do radical α; o valor β_1 do radical β que corresponde a α_1 pela fórmula $\alpha\beta = -p/3$ também será real, pois o número p também é real. Portanto, resulta que a raiz $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$ da equação também é real. As outras duas raízes achamos substituindo nas fórmulas de x_1, x_2 e x_3 as raízes da unidade $\varepsilon = \varepsilon_1$ e $\varepsilon^2 = \varepsilon_2$ por suas expressões já conhecidas.

$$x_2 = \alpha_1 \varepsilon + \beta_1 \varepsilon^2 = \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \beta_1 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{2} + i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

$$x_3 = \alpha_1 \varepsilon^2 + \beta_1 \varepsilon = \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \beta_1 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{(\alpha_1 + \beta_1)}{2} - i\sqrt{3}\,\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

como os números α_1 e β_1 são reais, estas duas raízes são números complexos imaginários conjugados, pois o coeficiente da parte imaginária é diferente de zero, devido ao fato de que $\alpha_1 \neq \beta_1$ e estes são valores de radicais cúbicos distintos. Podemos, então, concluir que, *se $D \langle 0$, a equação dada tem uma raiz real e duas raízes imaginárias conjugadas.*

2) Seja $D = 0$. Neste caso,

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Seja α_1 um valor real do radical α; em virtude da fórmula $\alpha\beta = -p/3$, β_1 também será um número real, sendo que $\alpha_1 = \beta_1$. Substituindo nas fórmulas de x_1, x_2 e x_3 β_1 por α_1 e aplicando a igualdade $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, resulta:

$$x_1 = 2\alpha_1 \qquad x_2 = \alpha_1 (\varepsilon + \varepsilon^2) = -\alpha_1 \quad x_3 = \alpha_1 (\varepsilon^2 + \varepsilon) = -\alpha_1$$

Portanto, se $D = 0$, todas as raízes da equação original são reais, sendo duas delas iguais entre si.

3) Seja, finalmente $D \rangle 0$. Neste caso, na fórmula de Cardano, sob o radical quadrado figura um número real negativo e, por conseguinte, sob os radicais cúbicos figuram números complexos imaginários conjugados. Em conseqüência disto, todos os valores dos radicais α e β são agora números complexos imaginários. Não obstante, entre as raízes da equação original tem que existir ao menos uma raiz real. (Não nos esqueçamos de que as raízes complexas aparecem aos pares: a raiz e seu número complexo conjugado). Suponhamos que essa raiz real seja $x_1 = \alpha_0 + \beta_0$

Como são reais tanto a soma dos números α_0 e β_0 como seu produto, que, por sinal, é igual a $- p / 3$, os números α_0 e β_0 são conjugados, já que são raízes de uma equação quadrática com coeficientes reais. Então são também conjugados os números complexos $\alpha_0 \varepsilon$ e $\beta_0 \varepsilon 2$ e também os números $\alpha_0\, \varepsilon^2$ e $\beta_0\, \varepsilon$ de onde deduzimos que as raízes da equação dada originalmente são também números reais.

$x_2 = \alpha_0 \varepsilon + \beta_0\, \varepsilon^2 \qquad x_3 = \alpha_0 \varepsilon^2 + \beta_0 \varepsilon$ são estas raízes.

Resulta, portanto, que as três raízes da equação são reais e, facilmente se comprova, são distintas. Caso contrário, a escolha da raiz x_1 poderia ser feita de modo que se obtivesse a igualdade $x_2 = x_3$, de onde teríamos,

$$\alpha_0 (\varepsilon - \varepsilon^2) = \beta_0 (\varepsilon - \varepsilon^2)$$

ou seja, $\alpha_0 = \beta_0$ que é impossível.

Portanto, se $D \rangle 0$, a *equação original tem três raízes reais e distintas.*

Pode - se perceber com este estudo que a fórmula de Cardano não é prática. Recaímos em extrações de raízes cúbicas de números complexos que, não raro, precisamos passar para a forma trigonométrica. Por esta razão a expressão das raízes mediante radicais perde seu valor prático.

EXEMPLO

1.Resolver a equação $y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0$
A substituição $y = x - 1$ reduz esta equação para $x^3 - 6x - 9 = 0$
Aqui temos $p = - 6$ e $q = - 9$, pelo qual obtemos,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} \rangle 0$$

ou seja, a equação tem uma raiz real e duas outras complexas conjugadas, evidentemente.

Segundo já estudamos, temos

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} \qquad \beta = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = 1$$

Portanto temos que $\alpha_1 = 2$ $\beta_1 = 1$, ou seja, $x_1 = 3$. As outras duas raízes encontramos pelas fórmulas já estudadas e são:

$$x_2 = -\frac{3}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad x_3 = -\frac{3}{2} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Daqui se deduz que as raízes da equação dada são:

$$y_1 = 2 \qquad y_2 = -\frac{5}{2} + i\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad y_3 = -\frac{5}{2} - i\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Resolver a equação $x^3 - 12x + 16 = 0$

Aqui $p = -12$ e $q = 16$, portanto,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

Daqui deduzimos que $\alpha_1 = -\sqrt[3]{8}$, ou seja, $\alpha_1 = -2$. Como conseqüência temos que $x_1 = -4$ e $x_2 = x_3 = 2$

3. Resolver a equação $x^3 - 19x + 30 = 0$

Aqui temos que $p = -19$ e $q = 30$, donde concluímos,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{784}{27} \langle 0$$

Assim, se nos mantivermos no campo dos números reais, a fórmula de Cardano não é aplicável, apesar de que suas raízes são números reais que podemos reconhecer como 2, 3 e -5.

Equações de quarto grau

A resolução da equação de quarto grau

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$$

com coeficientes complexos arbitrários se reduz à resolução de uma equação cúbica auxiliar. Isto se consegue com a aplicação do método de Ferrari, que passaremos a aplicar. Antes de tudo, vamos reduzir a equação dada a uma equação do quarto grau sem o termo x^3, com a seguinte substituição: $y = x - a/4$

Assim feito, obtemos a equação do quarto grau:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \qquad (\#)$$

Daí, o primeiro membro desta equação se transforma identicamente mediante o parâmetro auxiliar α, do seguinte modo:

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha x^2 - p\alpha, \quad \text{ou seja}$$

$$(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha)^2 - [2\alpha x^2 - qx + (\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4})] = 0$$

Escolhamos, agora, α de modo que o polinômio que figura entre colchetes seja um quadrado perfeito. Para isto é necessário que haja uma raiz múltipla, isto é, é preciso que aconteça a seguinte igualdade:

$$q^2 - 4.2\,\alpha\,(\alpha^2 + p\,\alpha - r + \frac{p^2}{4}) = 0.$$

A igualdade acima é uma equação cúbica em relação à incógnita α, com coeficientes complexos. Como se sabe, esta equação tem três raízes complexas. Seja α_0 uma delas. Em virtude da fórmula de Cardano, a se expressa por radicais mediante os coeficientes da equação dada, ou seja, mediante os coeficientes da equação dada anteriormente, com coeficientes p, q e r (aquela de quarto grau em x). Com tal escolha para α, podemos dizer que o polinômio que figura entre colchetes tem uma raiz múltipla, $q : (4\alpha_0)$ que é de segunda ordem. Por conseguinte a equação toma a seguinte forma:

$$(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0)^2 - 2\alpha_0 (x - \frac{q}{4\alpha_0})^2 = 0$$

isto é, se decompõe em duas equações quadráticas:

$$x^2 - \sqrt{2\alpha_0}\, x + (\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}) = 0$$

$$(\#\#)$$

$$x^2 + \sqrt{2\alpha_0}\, x + (\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}) = 0$$

Como estas equações foram obtidas da equação (#), fazendo - se transformações idênticas, as raízes da equação (##) serão também raízes da equação (#). Também podemos observar, com facilidade, que as raízes da equação (#) são expressas por radicais mediante os coeficientes. Neste trabalho não escreveremos as fórmulas correspondentes, pois elas são extremamente complicadas e praticamente inúteis; da mesma forma nós não estudaremos, em separado, o caso em que a equação tenha coeficientes reais.

Equações de grau maior ou igual a cinco

Apesar que os gregos já conheciam os métodos de resolução das equações quadráticas, o descobrimento dos métodos de resolução das equações de terceiro e quarto grau, expostos anteriormente, pertencem ao século XVI. Durante quase três séculos continuaram fazendo estéreis provas ou melhor, estéreis tentativas, para achar fórmulas que expressassem as raízes de qualquer equação de quinto grau com coeficientes literais, através de radicais de seus coeficientes. Estas provas terminaram nos anos 20 do século passado, depois que Abel demonstrou que não existem tais fórmulas para equações de grau n, quando n é maior ou igual a 5. Entretanto o resultado de Abel não excluía a possibilidade de que as raízes de qualquer polinômio, com coeficientes numéricos, pudessem ser expressas mediante os coeficientes empregando - se alguma combinação de radicais ou, que qualquer equação possa ser resolvida por radicais. O problema sobre as condições segundo as quais uma equação dada é solúvel por radicais foi estudado detalhadamente por Galois nos anos trinta do século passado. Resultou deste estudo que para qualquer n, a partir de n = 5, pode - se apresentar equações insolúveis por radicais, que tem, inclusive, coeficientes numéricos inteiros. Assim podemos exemplificar com a equação

$$x^5 - 4x - 2 = 0.$$

As investigações de Galois influiram definitivamente no desenvolvimento de toda Álgebra Moderna. É um estudo profundamente interessante que cabe em outra exposição.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. KUROSHI,A G. **Curso de Álgebra Superior.** Moscu: MIR,1968
2. GUELLI, C. A ; IEZZI, G. ; DOLCE O. **Álgebra III.** S. Paulo:Moderna, 1970.
3. DOMINGUES, H. H. **Fundamentos da Aritmética**. S. Paulo: Atual, 1991.