Augusto de Abreu Pires(*)

Uma Axiomatização para o Cálculo Proposicional

(*) Mestre em Ciências da Computação e Matemática Computacional pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo - USP. Professor da Universidade de Sorocaba - UNISO. Professor da Faculdade de Processamento de Dados da Universidade Paulista — UNIP.

RESUMO:

Sem dúvida alguma, um dos principais tópicos da lógica matemática é o Cálculo Proposicional. Neste, a verificação do caráter veritativo de fórmulas é bastante importante; porém, métodos tradicionais, como tabelas de verdade e formas normais, às vezes, tornam-se exaustivos ou mesmo impraticáveis. Surge, então, a necessidade de uma teoria para o Cálculo Proposicional, ou seja, uma Axiomatização para o Cálculo Proposicional. Neste artigo, apresentaremos uma, entre muitas outras que existem.

Propositional Calculus is, no doubt, one of the main topics in mathematical logic. The checking out of the veritable character of formulae is quite important in it, although traditional methods such as tables of truth and normal forms become tiring or even impracticable sometimes. So, there is a meed for a theory for Propositional Calculus, that is, a building up of axioms for Propositional Calculus. In this article we will present one theory among so many others already existing.

1 - Introdução:

Inicialmente vamos definir o que vem a ser uma fórmula no Cálculo Proposicional.

Definiremos como *fórmula* (no Cálculo Proposicional) qualquer expressão construída com variáveis proposicionais (isto é, letras minúsculas p, q, r, acompanhadas ou não de índices inferiores que pertençam ao conjunto dos números inteiros positivos , para as quais atribuiremos os valores-verdade verdadeiro (V) ou falso (F)), pela aplicação de um número finito de conectivos (os símbolos -, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ que representam as cinco operações lógicas, negação, conjunção, disjunção, condicional e bicondicional, respectivamente), satisfazendo:

1) Toda variável proposicional sozinha é fórmula;

2) Se A e B são fórmulas, então - A, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ também são fórmulas;

3) Somente são fórmulas as expressões que são determinadas por meio das condições 1) e 2).

Notação: Usaremos as letras maiúsculas do alfabeto, acompanhadas ou não de índices inferiores que pertençam ao conjunto dos números inteiros positivos (Z_+), quando quisermos nos referir a uma fórmula da linguagem.

Na lógica matemática a verificação do caráter veritativo de uma fórmula por meio de tabelas de verdade ou formas normais pode-se tornar um trabalho muito exaustivo, dependendo do número de variáveis proposicionais que ela envolve.

Apresentaremos, então, um outro procedimento, pelo qual, por meio de teorias formais, se obtém um critério para decidir quanto ao caráter funcional veritativo de fórmulas; em outras palavras, uma teoria formal para o Cálculo Proposicional. Outro motivo que nos levou a escrever este artigo é a dificuldade de se encontrar algo semelhante nas publicações mais recentes sobre Lógica Matemática, e mesmo quando encontramos, a complexibilidade é grande. Vamos introduzir um método axiomático para o Cálculo Proposicional e gostaríamos de ressaltar que não é o único; pelo contrário, existem várias axiomatizações para o Cálculo Proposicional.

2 - Uma Axiomatização para o Cálculo Proposicional:

Vamos, então, introduzir uma teoria para o Cálculo Proposicional, que será usada daqui para a frente, e para esta teoria valem as seguintes definições.

Definição 1: Dizemos que uma fórmula A é *tautologia*, se ela assume o valor-lógico verdadeiro (V) para todas as atribuições de valores-verdade feitas às suas variáveis proposicionais.

Notação: Se A é uma fórmula e A é uma tautologia, indicaremos por $\vdash$ A.

Definição 2: Dizemos que uma fórmula A é *contradição*, se ela assume o valor-lógico falso (F) para todas as atribuições de valores-verdade feitas às suas variáveis proposicionais.

Definição 3: As fórmulas que não são contradições nem tautologias são chamadas *contingências*.

Definição 4: Dizemos que as fórmulas A e B são *logicamente equivalentes*, se e somente se A e B sempre assumem o mesmo valor-lógico para qualquer atribuição de valores-verdade feita às variáveis proposicionais de A e B.

Definição 5: Sejam A_1, A_2, ..., A_n e B fórmulas. Dizemos que as A_1, A_2, ..., A_n *implicam logicamente* B, se e somente se para cada atribuição de valores-verdade feita às variáveis proposicionais de A_1, A_2, ..., A_n e B, tal que os valores-lógicos de A_1, A_2, ..., A_n são simultaneamente verdadeiros (V) (ou seja, que torna A_1, A_2, ..., A_n verdadeiras); então, o valor-lógico de B também é verdadeiro (V) (ou seja, torna também B verdadeira). Dizemos também que B é *consequência lógica* de A_1, A_2, ..., A_n.

Chamaremos nossa teoria de σ. As condições que devem existir para essa teoria σ são as seguintes:

1) Os símbolos de σ serão: -, $\rightarrow$, (,), e as letras minúsculas do alfabeto p, q, e r acompanhadas ou não de índices inferiores que pertençam ao conjunto dos números inteiros positivos (Z_+). Chamaremos as letras minúsculas do alfabeto, p, q, e r, acompanhadas ou não de índices inferiores que pertençam ao conjunto dos números inteiros positivos (Z_+), de variáveis proposicionais e os símbolos - e $\rightarrow$ de conectivos.

2) O subconjunto de σ, no qual os elementos serão chamados de fórmulas, deve satisfazer as seguintes condições:

a) Toda variável proposicional sozinha é uma fórmula;

b) Se A e B são fórmulas, então - A e (A $\rightarrow$ B) também o são (é claro que o par de parênteses mais externo pode ser omitido);

c) Só é fórmula o que advém das condições a) e b) acima.

3) Dentre o subconjunto das expressões que são fórmulas, destacam-se aquelas que são ditas axiomas. Se A, B, e C são fórmulas quaisquer de σ, então, as fórmulas abaixo são ditas axiomas de σ:

A1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$;

A2) $(((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$;

A3) $((- B \rightarrow - A) \rightarrow (A \rightarrow B))$.

4) A única relação que utilizaremos entre fórmulas será aquela onde B é conseqüência direta, ou ainda mais, conseqüência lógica de (A $\rightarrow$ B) e A, ou seja, a regra de inferência Modus Ponens.

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}\right\} \text{conjunto de fórmulas}$$

$$\overline{}$$

$$q \;\; \} \text{ fórmula B}$$

e a relação usada foi a regra de inferência Modus Ponens.

Note que com os axiomas dados acima podemos ter uma infinidade de outros axiomas, pois estamos considerando que A, B, e C são fórmulas quaisquer.

Exemplo: Sendo A a fórmula p e B a fórmula (p $\rightarrow$ q), o axioma A1) torna-se:

$$(p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow p)),$$

que ainda é um axioma.

Note que, dada uma fórmula da teoria σ, é possível verificar se esta é ou não um axioma, e isto significa que σ é uma teoria axiomática; assim, de agora em diante, chamaremos nossa teoria σ de Teoria Axiomatizável σ, ou Teoria Axiomática σ.

Sabemos que no Cálculo Proposicional além dos símbolos adotados em nossa Teoria Axiomatizável σ, existem também os símbolos $\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$. Para trabalhar com esses símbolos, usaremos as definições abaixo.

Definição 6: Se A e B são fórmulas, então, (A $\wedge$ B) também é fórmula e é logicamente equivalente à fórmula - (A $\rightarrow$ - B).

Definição 7: Se A e B são fórmulas, então, (A $\vee$ B) também é fórmula e é logicamente equivalente à fórmula (- A $\rightarrow$ B).

Definição 8: Se A e B são fórmulas, então, (A $\leftrightarrow$ B) também é fórmula e é logicamente equivalente à fórmula (A $\rightarrow$ B) $\wedge$ (B $\rightarrow$ A).

Assim, sempre que depararmos com as fórmulas (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B) e (A $\leftrightarrow$ B), as substituiremos pelas fórmulas logicamente equivalentes dadas acima.

Com isso, concluímos a definição da nossa Teoria Axiomática σ. Vamos, agora, ver mais alguns conceitos complementares, que valem para qualquer teoria formal τ.

Definição 9: Uma demonstração (ou prova) em uma teoria τ é uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de fórmulas de τ, tal que para cada i uma das seguintes condições acontece:

A_i é um axioma de τ;

A_i é conseqüência direta de algumas fórmulas anteriores por meio de alguma regra.

Definição 10: Um teorema de τ é uma fórmula A de τ tal que exista uma demonstração de A, onde a última fórmula na demonstração é A, isto é, se A_1, A_2, ..., A_n é uma demonstração em τ, então, $A_n = A$. Assim, a seqüência A_1, A_2, ..., A_n é chamada de uma demonstração de A, e A é dita teorema.

Em geral, não existe um método para determinar se, dada uma fórmula A, existe uma demonstração de A.

Definição 11: Diremos que uma fórmula A é deduzida em τ de um conjunto de fórmulas Γ, se e somente se existe uma seqüência A_1, A_2, ..., A_n de fórmulas de Γ tal que $A_n = A$ e para cada i, ou A_i é um axioma de τ, ou A_i é conseqüência direta de algumas fórmulas anteriores por meio de alguma regra. Tal seqüência é chamada de demonstração (ou prova) de A ou, ainda, dedução de A, a partir de Γ. Os membros de Γ são chamados de premissas ou hipóteses da demonstração.

Notação: Usaremos a notação $\Gamma \models A$ para denotar que A é deduzida de Γ. A notação $\models A$ significa que vale A (isto é, A é um teorema), ou mostre que vale A (mostre que A é um teorema).

Observamos que, a partir do momento em que for demonstrado que $\models A$, a fórmula A poderá ser usada em demonstrações posteriores e, se demonstrarmos que $\Gamma \models A$, a fórmula A poderá ser usada em demonstrações posteriores, sempre que as hipóteses de Γ estiverem presentes, ou seja, forem satisfeitas.

Retomemos, agora, a nossa teoria σ. Nosso objetivo no Cálculo Proposicional é mostrar que as únicas fórmulas que são teoremas na teoria σ são exatamente aquelas que são tautologias, isto é, $\models A$, se e somente se $\vdash A$, que é chamado de *completude fraca*. A *completude forte* é caracterizada por $\Gamma \models A$ se e somente se $\vdash A$.

Com respeito à dedutibilidade, podemos enunciar certas propriedades:

P1) Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \models A$, então, $\Delta \models A$.

Comentário: Se, a partir de um conjunto de fórmulas Γ, podemos deduzir A, então, se acrescentarmos mais premissas a Γ, ainda deduziremos A.

P2) $\Gamma \models A$, se e somente se existe um subconjunto finito Δ de Γ, tal que $\Delta \models A$.

Comentário: A asserção da direita para a esquerda da bicondicional pode ser verificada por meio de P1). A asserção da esquerda para a direita da bicondicional acima torna-se obvia, quando notamos que qualquer demonstração de A, a partir de Γ, usa somente um número finito de premissas de Γ.

P3) Se $\Delta \models A$ e, para cada fórmula B em Δ, $\Gamma \models B$, então, $\Gamma \models A$.

Comentário: Aqui podemos dizer, "grosso modo", que vale a propriedade transitiva, isto é, se a fórmula A é deduzida das premissas em Δ, e cada premissa em Δ é deduzida das premissas em Γ, então, a fórmula A é deduzida das premissas em Γ.

Com esses conceitos em mãos podemos dar início às demonstrações, lembrando que nelas levaremos em conta o fato de que toda fórmula antecedida por um número ímpar de sinais de negação é logicamente equivalente simplesmente à negação desta, e toda fórmula antecedida por um número par de sinais de negação é logicamente equivalente simplesmente à fórmula original.

3 - Algumas Demonstrações:

Vamos mostrar primeiramente que a fórmula $(A \rightarrow A)$ é um teorema, isto é, que existe uma demonstração para a fórmula $(A \rightarrow A)$, para qualquer fórmula A.

Teorema 1: $\models (A \rightarrow A)$.

Demonstração:

(1) $(A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ A2)

(2) $A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ A1)

(3) $(A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ MP 1,2

(4) $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ A1)

(5) $A \rightarrow A$ MP 3,4.

Note que obtivemos uma demonstração para a fórmula $(A \rightarrow A)$, pois temos acima uma seqüência de fórmulas, como na definição 9, onde a última fórmula dessa seqüência é a fórmula $(A \rightarrow A)$, ou seja, o teorema $(A \rightarrow A)$.

Teorema 2: $\models (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

Demonstração:

(1) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ A1)

(2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ A2)

(3) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ MP1,2

(4) $((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))) \rightarrow (((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))))$ A2)

(5) $((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ MP3,4

(6) $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ A1)

(7) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ MP5,6.

Teorema 3: $(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \models (A \rightarrow C)$.

Demonstração:

(1) $A \rightarrow B$ Hipótese

(2) $B \to C$	Hipótese
(3) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Teorema 2
(4) $(A \to B) \to (A \to C)$	MP 2,3
(5) $A \to C$	MP1,4.

Teorema 4: $\models - A \to (A \to B)$.

Demonstração:

(1) $(- B \to - A) \to (A \to B)$	A3)
(2) $- A \to (- B \to - A)$	A1)
(3) $- A \to (A \to B)$	Teorema 3 1,2.

Teorema 5: $\models (B \to C) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$.

Demonstração:

(1) $(B \to C) \to ((- A \to B) \to (- A \to C))$	Teorema 2
(2) $(B \to C) \to ((A \vee B) \to (- A \to C))$	Definição 7
(3) $(B \to C) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$	Definição 7.

Teorema 6: $\models - - A \to A$.

Demonstração:

(1) $- - A \to (- A \to - - - A)$	Teorema 4
(2) $(- A \to - - - A) \to (- - A \to A)$	A3)
(3) $- - A \to (- - A \to A)$	Teorema 3 1,2
(4) $(- - A \to (- - A \to A)) \to ((- - A \to - - A) \to (- - A \to A))$	A2)
(5) $(- - A \to - - A) \to (- - A \to A)$	MP 3,4
(6) $- - A \to - - A$	Teorema 1
(7) $- - A \to A$	MP 5,6.

Teorema 7: $\models A \to - - A$.

Demonstração:

(1) $- - - A \to - A$	Teorema 6
(2) $(- - - A \to - A) \to (A \to - - A)$	A3)
(3) $A \to - - A$	MP 1,2.

Teorema 8: $\models A \to ((A \to B) \to B)$.

Demonstração:

(1) $(A \to B) \to (A \to B)$	Teorema 1
(2) $((A \to B) \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B))$	A2)
(3) $((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$	MP 1,2
(4) $A \to ((A \to B) \to A)$	A1)
(5) $A \to ((A \to B) \to B)$	Teorema 3 3,4.

Teorema 9: $\models (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

Demonstração:

(1) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to$

$(A \to C))$	A2)
(2) $((A \to B) \to (A \to C)) \to ((B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C)))$	Teorema 2
(3) $B \to (A \to B)$	A1)
(4) $(B \to (A \to B)) \to (((B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C))) \to (B \to (A \to C)))$	Teorema 8
(5) $((B \to (A \to B)) \to (B \to (A \to C))) \to (B \to (A \to C))$	MP 3,4
(6) $((A \to B) \to (A \to C)) \to (B \to (A \to C))$	Teorema 3 2,5
(7) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	Teorema 3 1,6.

Teorema 10: $\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.

Demonstração:

(1) $((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \to ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$	Teorema 9
(2) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Teorema 2
(3) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	MP 1,2.

Teorema 11: $\models A \to (B \to (A \wedge B))$.

Demonstração:

(1) $A \to ((A \to - B) \to - B)$	Teorema 8
(2) $- - (A \to - B) \to (A \to - B)$	Teorema 6
(3) $(- - (A \to - B) \to (A \to - B)) \to (((A \to - B) \to - B) \to (- - (A \to - B) \to - B))$	Teorema 10
(4) $((A \to - B) \to - B) \to (- - (A \to - B) \to - B)$	MP 2,3
(5) $A \to (- - (A \to - B) \to - B)$	Teorema 3 1,4
(6) $(- - (A \to - B) \to - B) \to (B \to - (A \to - B))$	A3)
(7) $A \to (B \to - (A \to - B))$	Teorema 3 5,6
(8) $A \to (B \to (A \wedge B))$	Definição 6.

Teorema 12: $\models (A \to B), (B \to A) \models (A \leftrightarrow B)$.

Demonstração:

(1) $A \to B$	Hipótese
(2) $B \to A$	Hipótese
(3) $(A \to B) \to ((B \to A) \to ((A \to B) \wedge (B \to A)))$	Teorema 11
(4) $(B \to A) \to ((A \to B) \wedge (B \to A))$	MP 1,3
(5) $(A \to B) \wedge (B \to A)$	MP 2,4
(6) $(A \leftrightarrow B)$	Definição 8.

Teorema 13: $\models (- A \to B) \to (- B \to A)$.

Demonstração:

(1) $B \to - - B$	Teorema 7
(2) $(B \to - - B) \to ((- A \to B) \to (- A \to - - B))$	Teorema 2

(3) $(-A \rightarrow B) \rightarrow (-A \rightarrow --B)$	MP 1,2
(4) $(-A \rightarrow --B) \rightarrow (-B \rightarrow A)$	A3)
(5) (- A Æ B) Æ (- B Æ A)	Teorema 3 3,4.

Teorema 14: $\models (-A \rightarrow B) \leftrightarrow (-B \rightarrow A)$.

Demonstração:

(1) $(-A \rightarrow B) \rightarrow (-B \rightarrow A)$	Teorema 13
(2) $(-B \rightarrow A) \rightarrow (-A \rightarrow B)$	Teorema 13
(3) $(-A \rightarrow B) \leftrightarrow (-B \rightarrow A)$	Teorema 12.

Teorema 15: $\models (A \rightarrow -B) \rightarrow (B \rightarrow -A)$.

Demonstração:

(1) $--A \rightarrow A$	Teorema 6
(2) $(--A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow -B) \rightarrow (--A \rightarrow -B))$	Teorema 10
(3) $(A \rightarrow -B) \rightarrow (--A \rightarrow -B)$	MP 1,2
(4) $(--A \rightarrow -B) \rightarrow (B \rightarrow -A)$	A3)
(5) $(A \rightarrow -B) \rightarrow (B \rightarrow -A)$	Teorema 3 3,4.

Teorema 16: $\models (A \rightarrow -B) \leftrightarrow (B \rightarrow -A)$.

Demonstração:

(1) $(A \rightarrow -B) \rightarrow (B \rightarrow -A)$	Teorema 15
(2) $(B \rightarrow -A) \rightarrow (A \rightarrow -B)$	Teorema 15
(3) $(A \rightarrow -B) \leftrightarrow (B \rightarrow -A)$	Teorema 12.

Teorema 17: $\models (A \rightarrow B) \rightarrow (-B \rightarrow -A)$.

Demonstração:

(1) $--A \rightarrow A$	Teorema 6
(2) $(--A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (--A \rightarrow B))$	Teorema 10
(3) $(A \rightarrow B) \rightarrow (--A \rightarrow B)$	MP 1,2
(4) $(--A \rightarrow B) \rightarrow (-B \rightarrow -A)$	A3)
(5) $(A \rightarrow B) \rightarrow (-B \rightarrow -A)$	Teorema 3 3,4.

Teorema 18: $\models (A \rightarrow B) \leftrightarrow (-B \rightarrow -A)$.

Demonstração:

(1) $(A \rightarrow B) \rightarrow (-B \rightarrow -A)$	Teorema 17
(2) $(-B \rightarrow -A) \rightarrow (A \rightarrow B)$	A3)
(3) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (-B \rightarrow -A)$	Teorema 12.

Teorema 19: $\models (A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$.

Demonstração:

(1) $(-A \rightarrow B) \leftrightarrow (-B \rightarrow A)$	Teorema 14
(2) $(A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A)$	Definição 7.

Teorema 20: $\models (A \wedge B) \rightarrow A$.

Demonstração:

(1) $-A \rightarrow (A \rightarrow -B)$	Teorema 4

(2) $(- A \to (A \to - B)) \to (- (A \to - B) \to A)$ Teorema 13
(3) $- (A \to - B) \to A$ MP 1,2
(4) $(A \wedge B) \to A$ Definição 6.

Teorema 21: $\models (A \wedge B) \to B$.
Demonstração:
(1) $(- B \to (A \to - B))$ A1)
(2) $(- B \to (A \to - B)) \to (- (A \to - B) \to B)$ Teorema 13
(3) $- (A \to - B) \to B$ MP 1,2
(4) $(A \wedge B) \to B$ Definição 6.

Teorema 22: $\models A \to (A \vee B)$.
Demonstração:
(1) $A \to (- A \to B)$ Teorema 4
(2) $A \to (A \vee B)$ Definição 7.

Teorema 23: $\models B \to (A \vee B)$.
Demonstração:
(1) $B \to (- A \to B)$ A1)
(2) $B \to (A \vee B)$ Definição 7.

Teorema 24: $\models A \leftrightarrow A$.
Demonstração:
(1) $A \to A$ Teorema 1
(2) $A \leftrightarrow A$ Teorema 12.

Teorema 25: $\models A \leftrightarrow - - A$.
Demonstração:
(1) $A \to - - A$ Teorema 7
(2) $- - A \to A$ Teorema 6
(3) $A \leftrightarrow - - A$ Teorema 12.

Teorema 26: $\models (A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C))$.
Demonstração:
(1) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ Teorema 9
(2) $(B \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ Teorema 9
(3) $(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C))$ Teorema 12.

Teorema 27: $(A \leftrightarrow B) \models (A \to B)$.
Demonstração:
(1) $A \leftrightarrow B$ Hipótese
(2) $(A \to B) \wedge (B \to A)$ Definição 8
(3) $((A \to B) \wedge (B \to A)) \to (A \to B)$ Teorema 20
(4) $A \to B$ MP 2,3.

Teorema 28: $(A \leftrightarrow B) \models (B \to A)$.
Demonstração:
(1) $A \leftrightarrow B$ Hipótese

(2) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ Definição 8
(3) $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$ Teorema 21
(4) $B \rightarrow A$ MP 2.3.

As demonstrações anteriores são, em alguns casos, muito trabalhosas. Vamos, agora, enunciar um teorema, chamado Teorema da Dedução, que vai facilitar, até certo modo, as demonstrações de teoremas. É bom salientar que esse teorema não tem como objetivo apenas facilitar as demonstrações e, sim, mostrar que o que geralmente usamos em raciocínios matemáticos é verdadeiro, ou seja, se uma afirmação B, que é verdadeira, advém de uma outra afirmação A, então, concluímos que, se A, então B,é verdadeira.

Teorema da Dedução (TD): Se Γ é um conjunto de fórmulas, A e B são fórmulas e $\Gamma, A \models B$, então, $\Gamma \models (A \rightarrow B)$. Em particular, se $A \models B$, então, $\models (A \rightarrow B)$.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na maioria dos livros de Lógica Matemática.

Exemplo de aplicação do teorema da dedução:

No Teorema 2 anterior, devemos achar uma demonstração para:

$$\models ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))).$$

Vamos assumir como hipóteses (premissas) as fórmulas nas 3 primeiras linhas seguintes:

(1) $(B \rightarrow C)$
(2) $(A \rightarrow B)$
(3) A
(4) B MP 2, 3
(5) C MP 1, 4.

Assim, temos uma dedução da fórmula C a partir das fórmulas $(B \rightarrow C)$, $(A \rightarrow B)$, e A, ou seja, usando a notação definida anteriormente, temos:

$(B \rightarrow C), (A \rightarrow B), A \models C$.

Usando o teorema da dedução, obtemos:

$(B \rightarrow C), (A \rightarrow B) \models (A \rightarrow C)$.

Usando novamente o teorema da dedução, obtemos:

$(B \rightarrow C) \models ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$.

Finalmente, usando o teorema da dedução, obtemos o resultado desejado, ou seja:

$$\models ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))).$$

Vamos, agora, enunciar uma proposição que será útil para a demonstração do teorema seguinte.

Proposição 1: Sejam A e B fórmulas; se as fórmulas A e $(A \rightarrow B)$ são tautologias, então, a fórmula B também é tautologia.

Demonstração:

Se a fórmula B assume o valor-lógico falso (F) para alguma atribuição de valores-verdade feita às variáveis proposicionais das fórmulas A e B, então, como assumimos que a fórmula A é uma tautologia, teremos que o valor-lógico da fórmula (A $\rightarrow$ B) é falso (F), para essa atribuição de valores-verdade feita às variáveis proposicionais das fórmulas A e B, o que contradiz a hipótese de que a fórmula (A $\rightarrow$ B) é uma tautologia. Portanto, a fórmula B não assume o valor-lógico falso (F); logo, a fórmula B é uma tautologia.

Teorema da Correção (TC): Seja A uma fórmula da Teoria Axiomatizável σ. $\models A \rightarrow \vdash A$; em outras palavras, se A é um teorema, então A é uma tautologia ou, ainda, todo teorema de σ é uma tautologia.

Sugestão de demonstração:

A princípio, deve-se verificar que todos os axiomas de σ são tautologias, haja vista para os axiomas, que ssão teoremas. Pela proposição acima vemos que a regra de inferência Modus Ponens leva tautologias em tautologia; logo, cada teorema de σ é uma tautologia.

Teorema da Completude: Seja A uma fórmula da teoria axiomatizável σ. $\vdash A \rightarrow \models A$; em outras palavras, se A é uma tautologia, então A é um teorema.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na maioria dos livros de Lógica Matemática.

Com estes dois teoremas, concluímos o nosso objetivo no Cálculo Proposicional, anunciado anteriormente, isto é:

$$\models A, \text{ se e somente se } \vdash A,$$

ou seja, mostrar que as únicas fórmulas que são teoremas na teoria σ são exatamente aquelas que são tautologias

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e álgebra de Boole**. 3.ed. São Paulo: Atlas, 1990.

2. HEGENBERG, Leonidas. **Dedução no cálculo de predicados**. São Paulo: EDUSP, 1978.

3. ——. **Dedução no cálculo de sentencial**. São Paulo: EDUSP, 1977.

4. ——. **Lógica, o cálculo de predicados**. São Paulo: Herder / EDUSP, 1973.

5. ——. **Lógica simbólica**. São Paulo: Herder, 1966.

6. MATES, Benson. **Lógica elementar**. São Paulo: Nacional / EDUSP, 1968.