Augusto de Abreu Pires (*)

Conhecendo as Equações Algébrico — Diferenciais

(*) Mestre em Ciências da Computação e Matemática Computacional pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo — USP. Professor da Universidade de Sorocaba — UNISO. Professor da Faculdade de Processamento de Dados do Instituto Superior de Ensino Sorocabano.

RESUMO

As Equações Algébrico-Diferenciais possuem grande importância. Mesmo assim, poucos estudos sobre elas são realizados. Nos últimos anos, porém, verificou-se um aumento no interesse em estudá-las. Este artigo tem por objetivo despertar o interesse de novos pesquisadores para esta área, introduzir os principais tipos de Equações Algébrico-Diferenciais, e o conceito de índice, o que faz com que as Equações Diferenciais Ordinárias constituam uma classe particular das Equações Algébrico-Diferenciais.

ABSTRACT

The Differential Algebraic Equations are greatly important although there is very little study about them, but in the last few years we can notice an increase of interest in studying them. The aim of this article is to catch the interest of new researchers towards this area, to introduce the main types of Differential Algebraic Equations and the concept of index, which makes the Ordinary Differential Equations a particular class of Differential Algebraic Equations.

1 — INTRODUÇÃO

Primeiramente, devemos ressaltar a escassez de bibliografias que tratem das Equações Algébrico — Diferenciais (EAD), sendo este, juntamente com a grande importância destas equações, os principais motivos do crescente interesse em estudá — las, verificado nos últimos anos. Ressaltamos que, para este trabalho, escolhemos [1] como texto básico.

Chamamos de EAD um sistema de equações que envolve equações algébricas e equações diferenciais que denotamos, em sua forma geral, por:

$$F(t,Y(t),Y'(t))=0 \tag{1.1}$$

onde $t \in I \subseteq \mathbf{R}$ e $Y(t) \in \mathbf{R}^m$.

Quando estudamos Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), começamos definindo o sistema de primeira ordem (1.1) e, em seguida, supondo que (1.1) pode ser escrita na forma explícita:

$$Y'(t)=f(t,Y(t)) \tag{1.2}$$

trabalhamos com este sistema.

Às vezes, porém, este procedimento não é desejável, ou mesmo é impossível.

Observamos então que, nos últimos anos, houve um aumento no interesse em se trabalhar diretamente com (1.1).

Nas EAD existem restrições algébricas às variáveis que podem aparecer explicitamente como em:

$$\begin{cases} f(t,x(t),y(t),y'(t))=0 \\ g(t,x(t),y(t))=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

onde a matriz Jacobiana de f em relação a x' $\left(\text{denotada por } \frac{\partial f}{\partial x'}=f_{x'}\right)$ é não singular, ou então elas podem aparecer implicitamente, quando $F_{Y'}$ em (1.1) é singular.

Naturalmente, as EAD apresentam dificuldades analíticas que não ocorrem com as EDO.

EAD surgem freqüentemente em problemas de diversas áreas de estudo, dentre as quais destacamos:

- Sistemas mecânicos restritos.
- Equações do movimento descrito por um pêndulo.
- Problemas em robótica.
- Problemas de controle ótimo com controles restritos.

Outro motivo para considerarmos diretamente (1.1), ao invés de tentarmos convertê-la para (1.2), é que quando problemas físicos são simulados, muitas vezes o modelo tem a forma de uma EAD (ou seja, (1.1)) e as restrições algébricas existentes explicitamente ou implicitamente também possuem significados físicos e ao convertermos (1.1) para a forma totalmente explícita (1.2), podemos perder estes significados. Existem outros motivos, práticos e numéricos, que nos levam a trabalhar diretamente com (1.1). Alguns deles podem ser encontrados em [1].

Um conceito bastante interessante é o de índice da EAD, que descreveremos a seguir.

Definição (1.1): O número mínimo de vezes que (1.1) será diferenciada com relação a t para determinar Y'(t) como uma função contínua de Y(t), t (ou seja, transformar a EAD em uma EDO) é o índice v da EAD (1.1).

Exemplo (1.1): Seja a EAD

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ 0 = g(t, x(t), y(t)) \end{cases},$$

diferenciando a segunda equação com respeito a t, temos:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ 0 = g_x(t, x(t), y(t))x'(t) + g_y(t, x(t), y(t))y'(t) + g_t(t, x(t), y(t)) \end{cases}.$$

Se g_y é não singular:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g_y^{-1}(t, x(t), y(t))(-g_x(t, x(t), y(t))x'(t) - g_t(t, x(t), y(t))) \end{cases}$$

e assim a EAD

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ 0 = g(t, x(t), y(t)) \end{cases}$$

tem índice 1.

Observe que, se g_y for singular, o processo de derivação da EAD ou parte dela continuará, e esta terá índice maior ou igual a 2.

Exemplo (1.2): Seja a EAD puramente algébrica

$$\{Y^2 - t = 0,$$

diferenciando-a com respeito a t obtemos

$$\{2YY' - 1 = 0,$$

e assim, desde que tenhamos $Y \neq 0$, podemos escrever $Y' = \frac{1}{2Y}$ e a EAD tem índice 1.

A partir da definição acima podemos concluir que toda EDO, na forma (1.2), é uma EAD de índice zero.

2 — TIPOS BÁSICOS DE EAD:

Basicamente podemos classificar as EAD em três grupos, de acordo com a sua forma estrutural, os quais apresentaremos a seguir:

2.1 — EAD linear com coeficientes constantes:

Este tipo de EAD apresenta — se na forma:

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t) \qquad (2.1)$$

onde A e B são matrizes de números reais ou complexos e t é uma variável real. O comportamento analítico e numérico deste tipo de EAD encontra — se bastante desenvolvido.

2.2 — EAD linear com coeficientes dependendo do tempo:

É uma EAD que se apresenta na forma:

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t) \qquad (2.2)$$

onde agora A(t) e B(t) também variam em função de t, e A(t) é singular para todo t.

O comportamento da EAD (2.2) difere bastante do comportamento da EAD (2.1).

Um caso especial deste tipo de EAD é a EAD linear semi-explícita com coeficientes dependendo do tempo:

$$\begin{cases} x_1'(t) + B_{11}(t)x_1(t) + B_{12}(t)x_2(t) = f_1(t) \\ B_{21}(t)x_1(t) + B_{22}(t)x_2(t) = f_2(t) \end{cases} \qquad (2.3)$$

2.3 — EAD geral:

A EAD não linear geral ou completamente implícita se apresenta na forma (1.1) e sua forma linear na derivada, também geral, é:

$$A(t, Y(t))Y'(t) + F(t, Y(t)) = 0. \qquad (2.4)$$

Um caso especial de (2.4) é a EAD não linear semi — explícita:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ 0 = f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \qquad (2.5)$$

Outro tipo de EAD que surge freqüentemente em muitas aplicações é a EAD semi — explícita (1.3).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRENAN, K. E., CAMPBELL, S. L., PETZOLD, L. R. **Numerical solution of initial — Value problems in differential — algebraic equations.** North Holland, 1989.