SALVADOR MOR DE LIMA (*)

# REFLEXÃO SOBRE CONJUNTOS INFINITOS

(*) Professor de Matemática, Geometria e Prática de Ensino na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Sorocaba.

## INTRODUÇAO

Os egípcios tinham um interessante sistema de numeração: representavam o um por um pauzinho, o dez por um nó, o cem por um osso, o mil por um machado e ... o infinito por um homem de braços abertos - O HOMEM ATONITO. Hoje, milênios depois, o homem continua atônito, frente à idéia do infinito.

O objetivo deste artigo é diminuir a perplexidade dos atônitos e deixar perplexos os indiferentes. Afinal, os exemplos de conjuntos infinitos, às vezes, dados pelos livros e repetidos pelos professores, são errôneos. Isto é nocivo, pois embora o conceito de infinito seja um daqueles que deve ser refinado com o aprofundar do estudo, não se pode esperar a chegada a um conceito correto se o ponto de partida foi um conceito tão erradamente ministrado que leva a outra direção, quando não à contradição.

É o caso dos exemplos que confundem a idéia de "muito grande" com a de infinito. Como aquele onde um conjunto infinito seria o de grãos de areia da Terra. Ora, é perfeitamente possível determinar o volume de um grão de areia e já se sabe o volume da Terra. O quociente entre o volume da Terra e o volume de um grão de areia é um número bem grande, mas, ainda assim, é um número determinável, logo finito. Este exemplo (diria, um contra-exemplo) dá a rota do precipício onde se encontram o "muito grande" e o infinito. Todavia, se o "muito grande" é infinito, então o "muito grande mais um" seria maior que ele e o seu reinado acabou. Não é sem motivo que os filósofos antigos identificavam Deus com o infinito e com o perfeito.

Este artigo não traz as respostas a todas as indagações que ocorrerão ao leitor mais atento. É antes um "hall", um despertador do desejo de estudar, refletir e, conseqüentemente, apurar este conceito. Não é parte de uma apologia da Teoria dos Conjuntos, pois, afinal, como tem sido ensinada, tem feito mais mal que bem ao ensino da Matemática (alguns, jocosamente, a classificam como doença profissional - a conjuntivite). Como no dizer de Halmos, referindo-se à Teoria dos Conjuntos,no prefácio da sua "Teoria Ingênua dos Conjuntos": "você precisa um pouco dela ...;leia-a, absorva-a e esqueça-a".

Agora, um pouco de como deixar de reverenciar o infinito (por temê-lo) e se voltar para outros deuses.

## CONJUNTOS EQUIVALENTES

Imagine uma fila (só para facilitar, com apenas duas pessoas) para comprar ingresso em um cinema.Este não é um conjunto qualquer, é um conjunto ordenado, com dois elementos, pessoa a e pessoa b, é um par ordenado. Ele pode ser definido por $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ e notado $(a,b)$. Esta definição pode ser entendida assim: $\{a\}$ representa o conjunto das pessoas que devem ser atendidas, para que a primeira pessoa (a) seja considerada atendida, $\{a,b\}$ seria, então, o conjunto das que devem ser atendidas, para que a segunda pessoa (b) seja considerada atendida. Observe que $\{1,2\} = \{2,1\}$ mas $(1,2) \neq (2,1)$.

Ora, se você tiver dois conjuntos (A e B)e dispuser de uma lei R (x,y) para relacionar os elementos de A com os elementos de B, de tal maneira que todo par ordenado, formado com o seu primeiro elemento tirado de A e o segundo de B, satisfaça ou não a lei R (x,y); então à tripla formada pelos dois conjuntos mais a lei chamamos relação(mais corretamente, relação binária).A relação, então, será o conjunto dos pares ordenados, com primeiro elemento em A e segundo em B, que tornem verdadeira a lei R (x, y). Isto é, do conjunto de todos os pares ordenados com primeiro elemento em A e segundo em B (chamado produto cartesiano) se especifica o subconjunto dos pares que satisfazem a lei de correspondência, construímos, aí, uma relação.Um banal exemplo: numa dan ceteria, sejam A o conjunto dos rapazes, B o conjunto das garotas e R (x,y) a lei de correspondência "estar dançando, junto com, esta música"; a relação seria obtida com a enumeração de todos os pares (rapaz, garota) que estão dançando determinada música. Repare que, neste exemplo, a relação não é tal que todo elemento de A tenha par em B ou todo elemento de B tenha par em A, pois, entre outros motivos, pode acontecer que algum rapaz ou garota não esteja dançando.

O exemplo acima faz pensar em outros em que a cada elemento de A a relação R associe um único elemento em B (a relação assim seria uma função de A em B) e, ainda, a cada elemento de B faça corresponder um, e um só, elemento em A. Os conjuntos A e B ficariam esgotados, no sentido de que todos os seus elementos teriam par, porém, não mais que um. Tal relação estabeleceria uma correspondência que sempre aplicaria elementos distintos sobre elementos distintos. Ela pode existir e é chamada correspondência biunívoca ou função bijetora.

Mas em quais condições, sobre os conjuntos, a correspondência biunívoca existiria? Vejamos um exemplo: $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2\}$, neste caso todas as $2^6$ relações possíveis de A em B, não são correspondências biunívocas pois, ou sempre sobrará um elemento (pelo menos um) em um dos conjuntos sem par no outro, ou um elemento de um conjunto terá mais de um correspondente no outro. Parece que os conjuntos relacionados por correspondência biunívoca devem ter uma propriedade comum, não?

Caso exista correspondência biunívoca entre dois conjuntos, A e B, eles serão considerados equivalentes (notação: $A \sim B$). Serão equivalentes, portanto, os conjuntos com essa tal "propriedade comum", prevista no parágrafo anterior. Que será esta propriedade?

## O "TAMANHO" DE UM CONJUNTO

Pense no conjunto de todos os conjuntos(não pense muito para não cair no Paradoxo de Russel! Veja Paradoxos na Teoria dos Conjuntos, em Lipschutz) e nele a relação E definida com a seguinte lei: "ser equivalente a". Repare que, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, temos primeiro: A~A, pois a função que aplica cada elemento de A em si mesmo é bijetora; esta função é chamada identidade e por esta propriedade dizemos que a relação E é reflexiva; segundo: se A~B então B~A (propriedade simétrica), pois se A~B então há uma correspondência biunívoca entre A e B e a inversa desta relação também é uma correspondência biunívoca; terceiro: se A~B e B~C, então A~C (transitividade), pois se existem as funções bijetoras de A em B e de B em C, então existe a composta, de A em C, que também é bijetora. Conclui-se que a relação de equivalência em conjuntos é uma relação de equivalência, por ter as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. E você esperava que a relação de equivalência não fosse de equivalência ?

Embora falte criatividade na nomenclatura, o fato de uma relação de equivalência em conjuntos ser uma relação com a propriedade de ser de equivalência é sumamente interessante, pois toda relação de equivalência gera uma partição no conjunto no qual é definida. Com isto temos que a relação E parte o conjunto de todos os conjuntos, isto é, este tal fica dividido em famílias de conjuntos equivalentes entre si. Sendo prolixo: a família de todos os conjuntos vazios (família unitária), a família de todos os conjuntos unitários, a família de todos os pares (não ordenados!), etc. Repare que estas famílias são disjuntas. Cada uma delas é chamada uma classe de equivalência.

Nesta altura, você já sabe o que seria a tal "propriedade comum" - é o número de elementos do conjunto. Assim, seriam equivalentes os conjuntos com o mes mo número de elementos. Está tudo muito bem, está tudo muito bom, mas realmente...esta idéia só vale para conjuntos finitos! Adiante, então, "ad infinitum"...

## CONJUNTOS ENUMERÁVEIS

Podemos até, como faz Halmos(veja bibliografia), definir o número zero como Ø, o um como {o}, o dois como {o,1}, o três como {o,1,2}, e assim por diante. O representar a classe de equivalência (família de conjuntos equivalentes entre si) por um número natural, leva à construção de um conjunto para o qual vale o Axioma da Infinidade -"Há um conjunto que contém O e que contém o sucessor de cada um de seus elementos", ou seja existe sempre um conjunto sucessor, no sentido de que 4 está contido em 5, a saber, {o,1,2,3} está contido em {o,1,2,3,4}. Este conjunto é o nosso velho conhecido{o,1,2,3,4,5,...},o conjunto dos naturais.

Pois bem, se um conjunto é equivalente ao conjunto dos naturais, ou a um seu subconjunto finito, dizemos que o conjunto é contável. Se a correspondência biunívoca ocorrer com o próprio N, dizemos que o conjunto é enumerável.

O que pode surpreender é que podemos encontrar subconjuntos de N, enumeráveis, isto é, equivalentes ao próprio N. Este fato leva esta idéia de número de elementos de um conjunto a restringir-se apenas a conjuntos finitos. Alguns exemplos:

A cada número natural poderemos fazer corresponder o seu dobro, que é um número natural; então temos uma função bijetora, $f(x) = 2x$, de N no conjunto dos naturais pares, que é subconjunto de N, portanto N é equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo.

A relação em N, definida por "x é par de y, se e somente se, $|x - y|$ é divisível por 5" (x é congruente a y, módulo 5), que pode ser entendida assim: 6 é par de 1, pois $|6 - 1| = 5$ que é divisível por 5; 12 é par de 2, pois $|12 - 2| = 10$ que é divisível por 5; etc; é uma relação de equivalência em N. Esta relação gera uma partição no conjunto N, representada pelas classes $E_0 = \{0,5,10,...\}$, $E_1 = \{1,6,11,...\}$, $E_2 = \{2,7,12...\}$, $E_3 = \{3,8,13,...\}$, e $E_4 = \{4,9,14,...\}$. Repare que $E_0$ é a classe dos números naturais cujo resto da divisão por 5 é zero, $E_1$ é a classe de resto 1, $E_2$ é a classe de resto 2, etc. Acontece que a função $f(x) = 5n + r$, conforme r varia de 0 a 4, provoca, em cada caso, uma correspondência entre N e cada uma das classes $E_0$, $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$. O mais surpreendente é que a reunião de todas essas classes de restos é o próprio conjunto N, ou seja, além de N ser equivalente a subconjuntos próprios de si mesmo, ocorre que a reunião destes é o próprio N. O todo, aqui, é equivalente a cada uma das partes !

A perplexidade não se esgota nesses dois exemplos, pois poderíamos (mas não o faremos; veja Halmos, pág. 101 e Lipschutz, pág. 190) construir uma família infinita de subconjuntos infinitos de N cuja união é o próprio conjunto N. Estas extravagâncias não podem ocorrer num conjunto finito. Estamos no caminho certo: **"Um conjunto é infinito sempre que for equivalente a um subconjunto próprio de si mesmo.** Caso contrário será finito".

Você já foi, por certo, convidado a participar de uma corrente (talvez já tenha até sido persuadido. Tudo bem. Quando se perde, não se conta). Trata-se de uma função em que os aderentes pagam ao primeiro da fila um prêmio, colocam seu próprio nome no último lugar da fila e arrumam outros simplórios. Faz-se corrente de tudo: dinheiro, selos, cartões, sapatos e até mulheres. (Nesta última havia a advertência que aquele que interrompesse a corrente receberia sua mulher de volta e, ainda, acompanhada da sogra!) Não há possibilidade de se ganhar algo significativo em uma corrente, pelo simples fato de que ela cresce geométricamen te, com razão muito alta. Com isto, como o círculo de relacionamento de uma pessoa, embora grande, é finito, a comunidade se esgota em constrangidas recusas à participação. A solução seria a realimentação da corrente com a renovada participação dos iniciantes da corrente, seus sucessores, os sucessores destes e assim por diante. Teríamos, então, dois conjuntos infinitos equivalentes (um, aparentemente, maior que outro), a saber, o das pessoas participantes e o dos bens envolvidos. Conclusão: só ganham os que iniciam a corrente, e não muito!

## NÚMEROS CARDINAIS

Associaremos a cada classe de conjuntos equivalentes um número que chamaremos "cardinal" do conjunto e representaremos por $\#$. No caso de conjuntos finitos fica fácil: $\#(\phi) = 0$, $\#(\{o\}) = 1$, $\#(\{o,1\}) = 2$ e assim por diante. Ao cardinal de N e de todos os conjuntos a ele equivalentes (os enumeráveis) é adotado um cardinal transfinito, cujo simbolo $\aleph_o$, tirado do alfabeto hebreu, lê-se alef-zero. Observe que isto se dá em virtude de não haver um número natural que conte o "tamanho" de N.

Acontece que, embora tenhamos a impressão de ter chegado ao "infinito definitivo", podemos constatar conjuntos não contáveis, isto é, não finitos e não enumeráveis. E o caso do conjunto dos números reais. Um esboço de demonstração deste fato:

Se o conjunto R fosse enumerável, como todo nú mero real pode ser escrito no sistema binário (usando apenas os algarismos 0 e 1), haveria, então a seqüência de números reais, onde cada elemento seria uma sucessão de zeros e/ou uns.

Vamos construir uma sucessão onde o 1º termo, seja 0, se o 1º termo da 1ª sucessão é 1, ou seja 1 se o 1º termo da 1ª sucessão é 0; o 2º termo seja 0, se o 2º termo da 2ª sucessão é 1, ou seja 1, se o 2º termo da 2ª sucessão é 0; e assim sucessivamente, o enésimo termo seja 0 ou 1, conforme o enésimo termo da enésima sucessão seja 1 ou 0.

A sucessão assim construída é diferente de todas as sucessões da seqüência dos números reais, pois pelo menos um dos algarismos é diferente. No entanto, esta sucessão de zeros e uns é um número real que não pertence à "seqüência" dos números reais. Logo o conjunto de R não é enumerável.

O cardinal de R é $\aleph_1$, que é estritamente maior que $\aleph_0$, pois é igual ao cardinal do conjunto de potência de N e, segundo o teorema de Cantor, $\#(A) < \#(2^A)$.
Complicado, não ?

O que importa é que você tenha notado, embora possa não estar totalmente convencido, que há "graus de infinitude".

## CONCLUSÃO

Em nossas aulas de Prática de Ensino, temos compartilhado com os formandos o mote da disciplina : "Toda aula exige reflexão".

Reflexão, antes, como procedimento de controle do que será ensinado, como será ministrado e com qual objetivo. Reflexão, durante, como procedimento de regulagem, dependente da retroalimentação fornecida pelo aluno (feedback). Reflexão, depois, para a análise dos erros e acertos cometidos e a otimização futura.

Um simples conceito dado, "en passant", irrefletidamente, gerará maior trabalho posterior para o seu refinamento. Este artigo apenas rascunhou as implicações do conceito de infinito (apenas um entre tantos). Para a arte-final segue pequena adequação bibliográfica, dedicada ao leitor mais curioso.

## BIBLIOGRAFIA


HALMOS, P.R. - Teoria Ingênua dos Conjuntos - Editora Polígono - 1970

LIPSCHUTZ, S. Teoria dos Conjuntos - Editora McGraw Hill - 1973

RUDIN, W. - Princípios de Análise Matemática - Ao Livro Técnico - 1971


----------