5

HELOÍSA GUEDES DE ALCÂNTARA (*)

UMA COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS PARA COMPUTAR OS AUTOVALORES DE MATRIZES COMPANHEIRAS

ABSTRACT - A Comparison between Methods to Compute the Eigenvalues of Companion Matrixes.

The article deals with a new way proposed to compute eigenvalues of companion matrixes using symmetrizers. There will also be a comparison between this and the best known method.

RESUMO -

O artigo trata de um novo caminho proposto para computar os autovalores de matrizes companheiras utilizando-se simetrizadores.- Será feita, também, a comparação com o melhor método existente.-

I - INTRODUÇÃO:

Devido à grande importância da aplicação de autovalores na Engenharia e outros ramos, atualmente são feitas muitas pesquisas a respeito, principalmente tratando-se de autovalores de matrizes não-simétricas,- já que o processo normalmente usado é muito lento.

O estudo será feito com uma classe de-

---

* Licenciada em Matemática pela FFCL/Sorocaba. Mestre em Matemática Aplicada pela UNICAMP.

matrizes, as matrizes companheiras C [5], e a comparação será entre a aplicação do algoritmo QR [1, 2], que nos fornecerá uma matriz onde os elementos da diagonal principal são os autovalores de C ; o outro método, usar-se-á simetrizadores [5] e a partir da matriz simétrica obtida, poder-se-á aplicar o algoritmo de Householder - Sturm - bissecção [1,2,4,7,8,10] para computar os autovalores.

A dificuldade do método QR, é que apesar de ser um dos melhores presentemente para matrizes gerais, é iterativo e converge muito demoradamente, enquanto que pelo outro caminho, espera-se que o método certamente convirja e tenha boa estabilidade.

SEJAM DADAS AS SEGUINTES DEFINIÇÕES:

Def. 1.1.: São chamadas matrizes companheiras as matrizes C que têm a seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \ldots & c_n \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots (1)$$

E uma propriedade dessas matrizes é que $\det(C-\lambda I) = \lambda^n - c_n \lambda^{n-1} - \ldots - c_2\lambda - c_1$

Logo, as raízes de

$$f(x) = x^n - c_n x^{n-1} - \ldots - c_2 x - c_1$$

são os autovalores de C.

Def. 1.2: Uma solução **simétrica** X da equação matricial $XS=S^TX$ é **dita simetrizadora** de S, e a matriz S é **dita simetrizável** neste caso.

Def. 1.3: Uma forma **hermitiana** é dita positiva definida se $x^*F\,x > 0,\ \forall\, x \neq 0$, onde F é uma matriz e x é um **vetor coluna.**

Def. 1.4: Uma matriz **hermitiana** F é positiva definida se e somente **se a** forma hermitiana associada a F é **positiva** definida.

Def. 1.5: Uma matriz **hermitiana** F é positiva definida se e somente **se todos** os menores principais líderes **são positivos.**

Def. 1.6: Uma matriz **hermitiana** F é positiva definida se e somente se **todos** os autovalores de F são números **reais** positivos.

As matrizes negativas **definidas** são definidas analogamente.

II - UMA APLICAÇÃO DE SIMETRIZADORES

Pela definição de autovalores, **temos** que:

$$Cx = \lambda x \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

onde C é a matriz companheira **real** (1) e x um vetor coluna.

Tomando a simetrizadora X de C e premultiplicando em (2) temos

$$XCx = \lambda Xx$$

Chamando A = XC e B = X então

$$Ax = \lambda Bx$$

onde A e B são matrizes **simétricas reais.**

Quando B é uma matrîz positiva definida, o problema $Ax = \lambda Bx$ pode ser reduzido ao problema simétrico padrão $Ez = \lambda z$ com E simétrica, usando-se a fatorização de Cholesky em B. Pode-se mostrar isso seguindo os livros de Wilkinson [1,2]:

Seja L uma matriz triangular inferior tal que $LL^T=B$, então podemos escrever $Ax = \lambda Bx$ como

$$Ax = \lambda LL^T x \text{ ou}$$

$$L^{-1} Ax = \lambda L^T x \text{ ou}$$

$$L^{-1} A(L^T)^{-1}L^T x = \lambda L^T x$$

Chamando $E = L^{-1}A(L^T)^{-1}$ e $z = L^T x$ teremos

$$Ez = \lambda z$$

onde E é uma matriz real e simétrica.

Com E conhecida, poderemos entãocomputar os autovalores λ de E, que são os mesmos de C, aplicando-se o método de Householder - Sturm - Bissecção [1,2,4,7,8,10].

A dificuldade que esse método poderia apresentar, seria na computação da matriz simetrizadora X, de forma que ela seja positiva definida, mas esse problema é evitado utilizando-se às Matrizes de Hankel.

III - MATRIZES DE HANKEL

Def. 3.1: Sejam s_i = traço (C^i), $i=0,1,\ldots$ Então chama-se Matriz de Hankel das Somas de Newton, toda matriz que tem a forma

$$H_{kk} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & \cdots & s_{2k-2} \end{pmatrix}, \quad k=1,2,\ldots,n \quad \ldots \quad (3)$$

onde s_i são as somas de Newton, isto é,

<u>Def. 3.2</u>: Sejam $f(x) = c_{n+1}x^n - c_n x^{n-1} - c_{n-1}x^{n-2} \ldots - c_2x - c_1$ com $c_{n+1}=1$

e

$$g(x) = b_{m+1}x^m - b_m x^{m-1} - b_{m-1}x^{m-2} \ldots - b_2x - b_1$$

dois polinômios de grau n e m, com coeficientes reais, $m < n$. Então as quantidade s_i, $i = -1,0,1,2,\ldots,$ definidas por

$$\frac{g(x)}{f(x)} = s_{-1} + \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} \quad \ldots$$

são chamadas de Parâmetros de Markov associados à função racional

$R(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ e as matrizes

$$H_{kk} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{k-1} & s_k & \cdots & s_{2k-2} \end{pmatrix} k=1,2,\ldots,n.. \quad \ldots (4)$$

são as matrizes de Hankel associadas aos Parâmetros de Markov.

Existem relações recursivas simples para generalizar os coeficientes das matrizes de Hankel dos Parâmetros de Markov.

Por exemplo, no caso n = m essas relações são dadas por

$$\left.\begin{array}{l} s_{-1} = b_{n+1} \\ s_0 - c_n s_{-1} = -bn \\ \vdots \\ s_{n-1} - c_n s_{n-2} \cdots -c_1 s_{-1} = -b_1 \end{array}\right\} \ldots (5)$$

$$s_t - c_n s_{t-1} \cdots -c_1 s_{t-n} = 0 \ (t=n,n+1,n+2)$$

No caso particular quando g(x) = f' (x) (1a. derivada de f (x)), foi mostrado por Datta [6] que a matriz de Hankel dos Parâmetros de Markov (4) associada a f(x) e f'(x) é justamente igual à Matriz de Hankel das Somas de Newton (3)(e as relações recursivas satisfeitas pelos Parâmetros de Markov neste caso são:

$$s_{-1} = 0$$

$$s_0 = n$$

$$s_1 - c_n s_0 = -(n-1)\, c_n$$

$$s_2 - c_n s_1 - c_{n-1} s_0 = -(n-2)\, c_{n-1}$$

$$\ldots$$

etc

resultando:

$$s_0 = n = \text{traço}\,(C^0)$$

$$s_1 = c_n = \text{traço}\,(C^1)$$

$$s_2 = c_n^2 + 2c_{n-1} = \text{traço}\,(C^2)$$

$$\ldots$$

etc

Mostraremos agora que a matriz de Hankel das somas de Newton (35) é uma simetrizadora de C^T e essa matriz é positiva definida se, e somente se, os autovalores de C são reais e distintos.

A demonstração é dada seguindo o artigo de Datta [3] :

Usando as relações recursivas entre os elementos da matriz de Hankel, podemos ver facilmente que

$$CH_{kk} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_k \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{2k-1} \end{pmatrix}$$ é simétrica

$k = 1,\dots,N$

Então $CH_{kk} = H_{kk}C^T$ .... (6)

Seja agora H_{kk} positiva definida.

Então, podemos escrever (.6) na forma

$$H_{kk}^{-1/2}\, C\, H_{kk}^{-1/2} = H_{kk}^{1/2}\, C^T H_{kk}^{-1/2}$$

E, se $P = H_{kk}^{-1/2}\, C\, H_{kk}^{1/2}$ temos

$$P^T = H_{kk}^{1/2}\, C^T\, H_{kk}^{-1/2} = H_{kk}^{-1/2}\, C\, H_{kk}^{1/2} = P$$

Mostrando que P é simétrica.

Também $C = H_{kk}^{1/2}\, P H_{kk}^{-1/2}$ é similar a P.

Como C é similar a uma matriz simétrica, logo os autovalores de C são reais.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores de C.

Como os autovalores de C são reais, pode-se escrever

$$H_{kk} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} *$$

$$K = 1,\dots,n$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \dots & \lambda_1^{k-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \dots & \lambda_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = VV^T$$

onde V é a matriz de Vandermonde. Como H_{kk} é positiva definida, V é não-singular e a não-singularidade de V significa qu $\lambda_1, \dots$ $\dots, \lambda_n$ são distintos.

Logo, ao invés de se trabalhar com C, usar-se-á C^T que tem os mesmos autovalores.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: É interessante observar que, além de se usar a matriz de Hankel das Somas de Newton para computar os autovalores reais e distintos de C como descrito acima, podemos usar essa matriz para obter as seguintes informações sobre a localização de autovalores de C, sem os mesmos serem computados: os autovalores de C são distintos

e negativos positivos reais se, e somente se, H é positiva definida e CH é negativa positiva definida. O resultado acima foi provado por Datta [6]

REFERÊNCIAS

[1] J. H. Wilkinson - "The Algebraic Eigenvalue Problem". Claredon Press, Oxford, 1965 - pp. 290 a 315, 347 a 353 485 a 569.

[2] J. H. Wilkinson - "Linear Algebra". and C. Reinsch ed. by F.L. Bauer, Berlin, Springer, 1971, pp. 191 a 371.

[3] B. N. Datta - "Application of Hankel Matrices of Markov - Parameters to the Solution of the Routh - Hurwitz and the Schur - Cohn Problems: Routh - Hurwitz - Markov and Schur - Cohn - Markov Theorems". J. Math.Anal.Appl., Março/1979.

[4] Ivan de Queirós Barros - "Métodos Numéricos - I - Álgebra Linear". Brasil - Março/70 - pp. 122 a 127, 143 a 157.

[5] B. N. Datta - Notas de Aula do Curso de Análise Numérica I. Março/77, UNICAMP.

[6] B. N. Datta - "Application of Hankel Matrix to the root - location problem", IEEE. Trans.Auto.Control, Agosto/1976 - pp. 610 a 612.

[7] J. Grad and M. A. Brebner - "Eigenvalues and Eigenvectors of a Real General Matrix". Communications of the ACM - Vol. 11/Number 12/December,1968. - pp. 820 a 825.

[8] K. Blum - "Numerical Analysis and Computation - Theory and Practice". Addison - Wesley, Reading, Mass, 1972-pp. 230 a 264.

[9] E. V. Krishnamurthy and S. K. Sen - "Computer - Based Numerical Algorithms". EWP (Affiliated East-West Press PVT Ltda) New Delhi, Madras, 1976-pp. 248 a 249.

[10] Robert T. Gregory and David L Karney- "A Collection of Matrices for Testing Computational Algorithms". Wiley -New York, 1969. pp. 55 a 113, 134 a 142.